▶**R09** **a et b sont deux complexes, montrer que :**

$$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$$

Corrigé

Recherche

La relation d'ordre évoque l'inégalité triangulaire qui s'écrit :

$$|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$$

Pour retrouver le membre de droite, on peut poser $z=a+b$ et $z'=a-b$.

Pour tous complexes z et z', l'inégalité triangulaire s'écrit :
$|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$.

• pour $z=a+b$ et $z'=a-b$, on obtient :

$$|a+b+a-b| \leqslant |a+b|+|a-b|$$
$$\Leftrightarrow |2a| \leqslant |a+b|+|a-b|$$
$$\Leftrightarrow |2| \times |a| \leqslant |a+b|+|a-b|$$

Résumons : $2|a| \leqslant |a+b|+|a-b|$ $(*)$

• pour $z=a+b$ et $z'=-a+b$, on obtient :

$$|a+b-a+b| \leqslant |a+b|+|-a+b|$$
$$\Leftrightarrow |2b| \leqslant |a+b|+|-(a-b)|$$
$$\Leftrightarrow |2| \times |b| \leqslant |a+b|+|a-b|$$

Résumons : $2|b| \leqslant |a+b|+|a-b|$ $(**)$.

• en ajoutant membre à membre $(*)$ et $(**)$, on obtient :

$$2|a|+2|b| \leqslant 2(|a+b|+|a-b|)$$
$$\Leftrightarrow 2(|a|+|b|) \leqslant 2(|a+b|+|a-b|)$$
$$\Leftrightarrow |a|+|b| \leqslant |a+b|+|a-b|$$

Conclusion :

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}, \qquad |a|+|b| \leqslant |a+b|+|a-b|$$